N.B.: Les parties I et II sont indépendantes

I Soit p une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On étudie le système (S) défini par :

$$(S)\begin{cases} f''(x) + p(x).f(x) = 0 \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

la fonction f inconnue étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1° Dans le cas où p est constante : $p(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, montrer que (S) a la seule solution : $f = 0$, sauf pour certaines valeurs de a que l'on précisera.

2° Soit φ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et Φ l'application définie, pour tout x réel, par :

$$\Phi(x) = (1-x).\int_0^x t.\varphi(t).dt + x.\int_x^1 (1-t).\varphi(t).dt.$$

a. Montrer que Φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et que l'on a :

$$\Phi'' = -\varphi \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \Phi(1) = 0.$$

b. Montrer, réciproquement, que si Φ_1 est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $\Phi_1'' = -\varphi$ et $\Phi_1(0) = \Phi_1(1) = 0$, alors Φ_1 est égale à Φ.

3° Déduire de ce qui précède que, pour que f soit solution du système (S), il faut et il suffit que :

[R] $\quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (1-x).\int_0^x t.p(t).f(t).dt + x.\int_x^1 (1-t).p(t).f(t).dt.$$

4° *a.* On pose : $m = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|$, $M = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$;

montrer que, si f satisfait à la relation [R], on a, pour $x \in [0,1]$:

$$|f(x)| \leqslant \frac{m.M}{8}$$

b. En déduire que, si $m < 8$, toute solution de (S) est nulle sur $[0,1]$; vérifier la cohérence de ce résultat avec celui obtenu à la question (1).

5° *a.* Si l'on remplace, dans (S), les conditions : $f(0) = f(1) = 0$ par : $f(c) = f(b) = 0$, c et b étant deux nombres réels distincts, montrer que toute solution f du nouveau système (S_1) ainsi obtenu vérifie :

$$\forall x \in [c,b], \quad |f(x)| \leqslant m.M.\frac{(b-c)^2}{8}, \text{ où :}$$

$$m = \max_{x\in[c,b]} |p(x)|, \quad M = \max_{x\in[c,b]} |f(x)|.$$

b. Peut-on en déduire une forme généralisée du résultat obtenu en 4° *b*?

II On considère maintenant le système simplifié (S') :

$$(S')\begin{cases} f''(x) + \dfrac{k}{x^2+1} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

f étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et k appartenant à $\mathbb{R}$.

1° *a.* Pour quelles valeurs de k, (S') aura-t-il une solution non nulle polynomiale en x? Dans ce cas, une telle solution peut-elle vérifier : $f(1) = 0$?

b. Dans l'hypothèse où $k = -6$, déterminer complètement la solution polynomiale vérifiant : $P'(0) = 1$, puis donner la forme explicite de la solution générale de (S'), après avoir donné celle de :

$$f''(x) + \frac{k}{x^2+1}.f(x) = 0.$$

2° *a.* Dans le cas où : $k = -2$, chercher si (S') admet une solution du type : $f(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n.x^n$, x appartenant à un intervalle réel de longueur non nulle. On déterminera explicitement les valeurs a_n nécessaires, puis l'on étudiera le rayon de convergence correspondant.

b. Calculer, pour cette solution, sa valeur au point $x = 1$.

FIN

×1156×
ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE
Options M et P' MATHEMATIQUES I (4 h) 1977

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail